ベーテ・サルピータ方程式の特異性と連続固有値(場の量子論の研究)

AUTHOR(S):

東島, 清

数理解析研究所講究録
1524巻 2006年 15-19

ベーテ・サルピータ方程式の特異性と連続固有値

大阪大学・大学院理学研究科　東島　清（Kiyoshi Higashijima）
Department of Physics
Osaka University

1.　はじめに

私は１９７０年から１９７４年まで、京都大学の大学院に在籍した。その当時、中西先生は大学院生向けに、先生の最新の研究に基づく講義をしておられた。修士課程の院生だけでなく博士課程の院生やスタッフの方も参加され、活発な議論がされていたのを記憶している。私が聴講したのは、不定計量の場の理論やゲージ理論に関する講義で、ランダウゲージを用いた量子電気力学の定式化、対称性の自発的破れに関する南部・ゴールドストンの定理、ヒッグス機構が起きたときのゲージ場の縦波とゴールドストンボソンの振る舞いなど、中西先生一流の明快さで聴衆を魅了しておられた。また、B 場が自由場になるので可換ゲージ理論はうまく定式化できるが、非可換ゲージ理論の場合はB場が自由場とならないために、ユニタリティの証明がうまくできないことを強調しておられた。この講義を聴いた若者の心に、皆この問題を何とか解決しようという思いがしみこんでいた。多分、後に九後・小嶋がFPゴーストを使ってBRS量子化を行い、この問題を解決するきっかけとなったと思う。

中西先生が不定計量の場の理論にすすまれた動機は、それ以前に長く研究されていたベーテ・サルピータ方程式の解に２重極ゴーストが現れるためだったと伺った。私がM2の時だったと思うが、先生のプログレスサプルメントに基づいて、中西先生はベーテ・サルピータ方程式の講義をされた[1]。あいにく、私は聴講しなかったが、同級生の山脇君が聴講していて、中西先生から別刷りを頂いたけれども自分でも購入したからと言って、一冊を私にくれた。それが私がベーテ・サルピーター方程式に出会ったはじめだと思う。少し読んでみたが、簡単に読める本ではなく、途中で諦めたことを覚えている。

その後、ゲージ理論における対称性の自発的破れに興味を持つようになった。特に、ヒッグススカラーを素粒子として扱うと、ゲージ粒子やヒッグススカラーの質量はインプットパラメーターになってしまうので、ヒッグス場を何かの束縛状態として扱うことで計算できるようにしたいと思うようになった。当時、ダイナミカルブレイキングと呼ばれていた考え方だが、この場合には南部・ゴールドストン粒子を束縛状態として作らなければならない。質量０の束縛状態だから、相対論的な扱いをしなければならないということで、ベーテ・サルピータ方程式に取り組むことにした。質量ゼロでもなかなか難しいので、4 次元の全運動量が 0（$P_\mu=0$）の場合を解こうと思って中西先生のサプルメントを読み返すと、この時のフェルミオン２体のベーテ・サルピータ方程式は擬スカラー、軸性ベクトルー テンソル、スカラー― ベクトルの３つのセクターに分かれていることがわかった。そのうち擬スカラー、軸性ベクトルー テンソルの２つのセクターは、そ

れぞれゴールドシュタイン、クンマーによる解がすでに知られていたが、スカラー— ベクトルのセクターはキームによる非常に特別な解が知られていたが、一般的には解かれていなかった。この場合の一般的な解を求めて私の博士論文にした[2]。審査委員会の質疑応答に窮したが、審査委員の一人だった中西先生に助け船により、無事合格することができた。

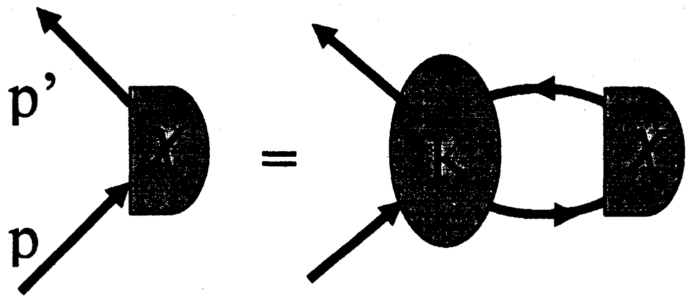
ベーテ・サルピータ方程式は、非フレドホルム型の積分方程式であるために、束縛状態に対応する離散固有値だけでなく連続固有値も存在する。離散固有値を求めるためには、連続固有値を除く必要があった。そのためには余分に境界条件を課す必要がある。今回はその話について報告したい。

2.　ベーテ・サルピータ方程式

フェルミオン２体の相対論的な束縛状態を記述するにはベーテ・サルピータ（BS）振幅

$$\chi(q,P)=\int d^4xe^{iq\cdot x}\langle 0|T\psi(x/2)\overline{\psi}(-x/2)|P\rangle$$

を用いる。ここで、qは相対運動量、Pは束縛状態の全運動量を表す。ψと$\overline{\psi}$はフェルミオンを表すスピノールなので、BS 振幅χは２つのスピノールの足を持つ４×４の行列である。BS 振幅は斉次のベーテ・サルピータ（BS）方程式

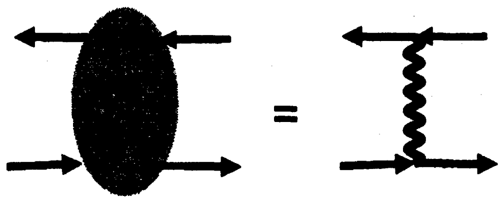


(1)

を満たす。ここで、$K(q,q';P)$は２粒子既約な相互作用積分核を表す。４次元運動量は

$$p'=q+\tfrac{1}{2}P,\ p=q-\tfrac{1}{2}P$$

を表す。例として、一番簡単な QED を考えると、２粒子既約な相互作用積分核の最低次近似ははしご近似で、１光子の交換に対応する



(2)

非相対論的なシュレディンガー方程式で束縛問題を考えるときには、力を表すポテンシャルエネルギーを与えて、束縛状態のエネルギー固有値を求めるのが普通だが、(1)のような積分方程式の場合には、束縛状態のエネルギー・運動量を与えて、そのような束縛状態を作るのに必要な力の強さを求める方が便利だ。例えば、はしご近似の場合には、(2)式はQEDの結合定数e^2に比例する

ので、質量が$\sqrt{P_\mu^2}$の束縛状態を作るのに必要な結合定数に対する固有値問題を解くことになる。

もっと一般の場合には、(1)式で相互作用積分核$K(q,q';P)$の前に形式的に定数λを導入して、λに対する固有値問題を解く。束縛状態の質量を動かすと、固有値λが変化するので、実際には$\lambda=1$になるような質量を持つ束縛状態が作られることになる。

3. 連続固有値について

N行N列の行列をK、N次元のベクトルをx, yとする時、斉次方程式（固有値問題）

$$x = \lambda Kx$$

が、解を持つのは、λが次の永年方程式を満たす場合（固有値）に限られる。

$$\det(1-\lambda K)=0$$

λが固有値以外の時には、$1-\lambda K$に逆が存在するので、非斉次方程式

$$x = y + \lambda Kx$$

に解が存在する。勿論、λが固有値λ_nに等しい場合でも、yが固有ベクトルx_nに直交すれば非斉次方程式は解を持つ。

N → ∞の極限を取って、積分方程式の場合に斉次方程式と非斉次方程式の関係を述べたのが、フレドホルムの交代定理であるが、積分作用素がフレドホルム型で無い場合には、成り立たない。ここでは、束縛状態を記述する斉次の BS 方程式と、散乱状態を記述する非斉次の BS 方程式を比べて、くり込まれた理論では、フレドホルムの交代定理が成り立たなくなることを示す。

局所フェルミオン演算子$\psi(x)$はスピノールの添え字と、内部対称性の添え字を持つとしておく。この時、θをスピノールに作用するγ行列、もしくは内部対称性の添え字に作用する行列として、次元3を持つ局所演算子を考える。

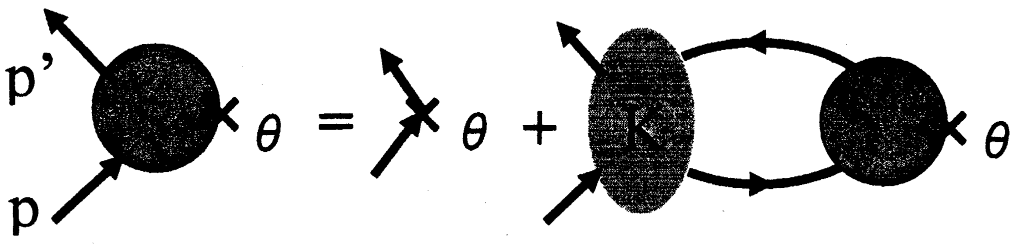
$$\Theta(x)=\overline{\psi}(x)\theta\psi(x)$$

スカラー、擬スカラー、ベクトル、擬ベクトル演算子の場合のθは、それぞれ$1, \gamma_5, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma_5$で

与えられる。この演算子に対するバーテックスを次の式で定義する（スピノールおよび内部対称性の添え字については和を取る）。

$$\begin{aligned}\Phi(p',p) &= G(p')\Gamma_\theta(p',p)G(p)\\ &= \int d^4x\int d^4y e^{i(p'x-py)}\langle 0|T\psi(x)\Theta(0)\overline{\psi}(y)|0\rangle\end{aligned}$$

ここで、$G(p)$はフェルミオンの2点関数を表し、Γ_θはフェルミオンに関して1粒子既約なバーテックスを表す。$G(p)$およびΓ_θを直線と円で表せば、バーテックスの満たす非斉次の BS 方程式を次のように図示することができる。

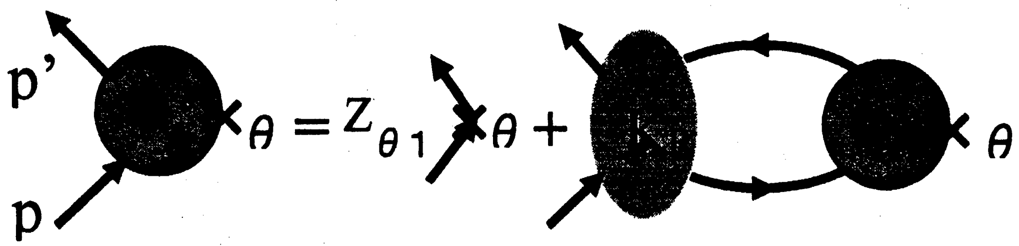


これを(1)式と比べると、(1)式は束縛状態に対応する特別の4次元運動量に対してだけ成り立つ固有値方程式であるのに対し、上の式は散乱状態に対応するので、束縛状態の極の直上を除く任意の4次元運動量に対し解を持つ。従って、一見するとフレドホルムの交代定理が成り立つように見える。

しかしながら、場の量子論ではくりこみを行う必要がある。フェルミオンの波動関数くり込みとバーテックスのくりこみを次のように行う。

$$G = Z_2 G_R,\ \Gamma_\theta = Z_{\theta 1}^{-1}\Gamma_{\theta R},\ K = Z_2^{-2}K_R,\ \Phi = Z_2^2 Z_{\theta 1}^{-1}\Phi_R$$

これを上の図式に代入すると、くり込まれたバーテックスに対するBS方程式を得る。



くり込まれたバーテックスに対するBS方程式も、一見すると非斉次のBS方程式に見えるが、場の量子論では多くの場合くりこみ定数が0になる。この場合には、この方程式も斉次方程式になるので、(1)の束縛状態のBS方程式に一致する。従って、

> バーテックスのくりこみ定数が0になるとき、すなわち
>
> $$Z_{\theta 1} = 0$$
>
> の時には、同じ斉次BS方程式が、束縛状態と共にくりこまれたバーテックス（散乱状態）も記述する。バーテックスは任意のエネルギー運動量に対して存在しなければならないので、**同じ斉次 BS 方程式が離散固有値と共に連続固有値を持つ。**（積分方程式としてはフレドホルムの交代定理は成り立たない。）離散固有値に対応する束縛状態を取り出すためには、関数空間を制限する必要がある。

どのような関数空間に制限すれば離散固有値を抜き出せるのだろうか?一般的な条件は知られていないが、漸近自由な場の理論に限れば、束縛状態のBS振幅に規格化できるという条件を課すことによって、離散固有値を取り出すことができる[3]。積分核が(2)式で与えられるはしご近似では、より具体的に議論することができるので、次節でははしご近似を用いて議論する。

3.　はしご近似のBS方程式

はしご近似の BS 方程式はフーリエ変換して座標表示に移れば、馴染み深いシュレディンガー方程式の形に書くことができる(m はフェルミオンの質量)。

$$H\Phi = -m^2\Phi \qquad (3)$$

ここのハミルトニアンは次式で定義される。

$$H = -\,!+V(R) = -\,!-\frac{\lambda}{R^2}, \quad \left(R = \sqrt{x^2}, \quad \lambda = \frac{3e^2}{4\pi^2}\right)$$

ただし、4 次元の各運動量を R とすると、4 次元のラプラシアンは

$$! = \frac{d^2}{dR^2} + \frac{3}{R}\cdot\frac{d}{dR} - \frac{L(L+2)}{R^2}$$

積分方程式の BS 方程式を微分方程式に書き換えると、次の境界条件が出てくる

$$\lim_{R\to 0} R^2\Phi(R) = 0$$

が、この条件は束縛状態も散乱状態も満たすので、この条件では解を区別することはできない。注意深く調べると、境界条件を次のように設定すれば、離散固有値と連続固有値を区別することができる。

$$\lim_{R\to 0} R\Phi(R) = 0$$

角運動量 $L = 0$ の場合に、シュレディンガー方程式(3)を解いて原点付近の漸近形を求めると、束縛状態（離散固有値）は

$$R^{-\nu}, \quad (\nu = 1 - \sqrt{1-\lambda} \approx \lambda)$$

のように振る舞うのに対し、散乱状態に対応するバーテックス（連続固有値）は

$$R^{-2+\nu}$$

のような振る舞いをすることが分かる。このように、はしご近似の枠内では連続固有値と離散固有値に対する境界条件を明確に定めることができる。すなわち、関数空間をより狭く制限すれば、連続固有値を離散固有値から区別することができる[4,5]。

参考文献

[1] Noboru Nakanishi, Prog. Theor. Pphys. Supplement, **43** (1969)1.

[2] Kiyoshi. Higashijima, Prog. Theor. Phys. **55** (1976) 1591.

[3] Kiyoshi Higashijima, Phys. Rev. **D18** (1978) 2128.

[4] Kiyoshi Higashijima and Akitoshi Nishimura, Nucl. Phys. **B113** (1976) 173.

[5] T. Maskawa and H. Nakajima, Prog. Theor. Phys. **52** (74) 1326.